Proseminar: Quadratische Formen

Prof. Dr. Annette Werner, Dr. Marcin Lara

Sommersemester 2024

In diesem Seminar beschäftigen wir uns mit den algebraischen Grundlagen der Theorie der quadratischen Formen. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine quadratische Form über K ist eine Funktion

$$f : K^n \to K, \quad x_1, \dots, x_n \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

für gegebene $\alpha_{ij} \in K$. Zum Beispiel ist

$$f(x, y) := x^2 + 3y^2 + 5xy$$

eine binäre quadratische Form über $\mathbb{Q}$. Die Theorie der quadratischen Formen ist von großer mathematischer Schönheit und Tiefe. Da sie eng mit Bilinearformen verwandt sind, gelten quadratische Formen heute oft als Teil der linearen Algebra. Sie sind aber auch in Zahlentheorie und Geometrie von Bedeutung. Zwei zentrale Fragen, welche wir in diesem Seminar behandeln wollen, sind:

- Wie können wir quadratische Formen über einem Körper K klassifizieren?
- Es sei f eine quadratische Form über K und $m \in K$ gegeben. Wie können wir bestimmen, ob die Gleichung $f(x_1, \dots, x_n) = m$ eine Lösung mit $x_1, \dots, x_n \in K$ hat?

Quadratische Formen sind seit der Antike bekannt und haben in der Entwicklung der modernen Mathematik immer wieder eine wichtige Rolle gespielt. Über mehrere Jahrhunderte hinweg haben die führenden Mathematiker Ihrer Zeit – Fermat, Lagrange, Euler, Gauss und viele weitere – wichtige Beiträge zur Theorie der quadratischen Formen geliefert, und diese haben dadurch eine wegweisende Rolle insbesondere in der Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie eingenommen.

Ausgehend von der Entwicklung der abstrakten Algebra zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurden dann bedeutende Fortschritte zur Klassifikation und Lösbarkeit quadratischer Formen erzielt, unter anderem von Hasse, Minkowski, Witt und Pfister, die ihrerseits wiederum Einfluss auf die Entwicklung der Algebra und zum Beispiel der arithmetischen Geometrie hatten.

Auf beide Entwicklungsstränge wollen wir in diesem Seminar eingehen: Unsere Hauptreferenz hierfür ist das Buch [Sch85] von Winfried Scharlau, welches als Ebook in der Bibliothek verfügbar ist. Beachten Sie, dass die Quellen auf englisch geschrieben sind, der Vortrag soll aber als Tafelvortrag auf Deutsch gehalten werden.

Bitte vereinbaren Sie rechtzeitig (mehr als zwei Wochen) vor Ihrem Vortrag einen Vorbesprechungstermin mit Dr. Marcin Lara (lara@math.uni-frankfurt.de).

Beachten Sie bitte die allgemeinen Tipps und Hinweise zur Vorbereitung eines gelungenen Seminarvortrages unter folgendem Link: https://www.uni-frankfurt.de/134848419.pdf.

17.4. 1) Vorbesprechung und Vortragsvergabe

8.5. 2) Bilinearformen und Quadratische Formen

Referenz: [Sch85, §1.1-1.2, S.1-6]

Besprechen Sie die Definition von Bilinearformen (Definition 1.1) und Isometrien (Definition 1.4). Beweisen Sie Lemma 1.5. Definieren Sie dann quadratische Formen (Definition 1.7) und besprechen Sie im Detail die Äquivalenz zwischen quadratischen Formen und Bilinearformen im Falle $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ (Lemma 1.8, Remark 1.9). Besprechen Sie dann noch die Matrixschreibweise, §2 bis zum dritten Satz auf Seite 6 ("Each problem...").

15.5. 3) Orthogonale Zerlegung

Referenz: [Sch85, §1.2-§1.3, S.6-8]

Besprechen Sie die adjungierte Transformation (S.6 ab "For V a vector space...", Definition 2.3 und Lemma 2.4). Führen Sie den Begriff der Orthogonalität ein (Definition 1.2, Lemma 1.3) und beweisen Sie Lemma 2.5.

Besprechen Sie zweitens die Orthogonalzerlegung, §3 bis einschließlich Lemma 3.7. Folgern Sie, dass jede quadratische Form äquivalent ist zu einer quadratischen Form

$$q(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1^n + \cdot + \alpha_n x_n^2$$

für gewisse $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$.

22.5. 4) Reguläre Unterräume

Referenz: [Sch85, §1.3]

In diesem Vortrag geht es darum, die Klassifikation bilinearer Räume auf jene regulärer Räume zurückzuführen. Besprechen Sie hierfür zunächst Theorem 3.8 mit Beweis. Besprechen Sie reguläre Komponenten (Definition 3.9 und Corollary 3.10). Beweisen Sie Lemma 3.11 und Corollary 3.12.

Definieren Sie als zweites Thema die orthogonale Summe bilinearer Räume (Definition 3.13). Geben Sie dann Beweise für die Aussagen in Definition 3.13, Lemma 3.14 und Lemma 3.15. Besprechen Sie schließlich noch die Determinante, Definition 3.16 und 3.17.

29.5. 5) Hyperbolische Räume

Referenz: [Sch85, §1.4]

Erklären Sie den Begriff des isotropen bilinearen Raumes, indem Sie Definition 4.1 vollständig besprechen. Besprechen Sie dann hyperbolische Räume (Lemma 4.2 und Definition 4.3). Diskutieren Sie Lemma 4.4 und geben Sie einen Beweis.

Beweisen Sie dann die Charakterisierung hyperbolischer Räume in Theorem 4.5 und Corollary 4.6. Geben Sie Definition 4.7 und folgern Sie Corollary 4.8 und 4.9. Wenn die Zeit dies zulässt, können Sie außerdem noch kurz Definition 4.10 und Lemma 4.11 besprechen.

5.6. 6) Der Satz von Witt

Referenz: [Sch85, §1.5]

In diesem Vortrag beweisen wir einige zentrale Strukturresultate über bilineare Räume:

Besprechen Sie zunächst Reflexionen (Definition 5.1, Lemma 5.2). Diskutieren Sie dann Theorem 5.3 (Satz von Witt) und Theorem 5.5 mit Beweis (insbesondere Lemma 5.6). Erwähnen Sie kurz die genauere Aussage Theorem 5.4 ohne Beweis.

Folgern Sie dann den Kürzungssatz von Witt (Corollary 5.8) und besprechen Sie Corollary 5.9 und Definition 5.10, und schließlich den Zerlegungssatz Corollary 5.11.

12.6. 7) Der Grothendieck–Witt Ring: Konstruktion

Referenz: [Sch85, §2.1], S.29-33 bis einschließlich Remark 1.10.

Definieren Sie den Raum $\hat{W}^+(K)$ der Isometrieklassen quadratischer Formen und erläutern Sie dessen Halbgruppen-Struktur (S.29). Besprechen Sie die Konstruktion der Grothendieck-Gruppe (Theorem 1.1 und Lemma 1.3). Geben Sie kurz das Beispiel $R^+ = \mathbb{N}$ und $R = \mathbb{Z}$.

Besprechen Sie dann die Multiplikationsstruktur auf $\hat{W}^+(K)$, indem Sie das Kronecker-Produkt $\otimes$ einführen (Definitionen 1.4 und 1.7). Erwähnen Sie hierfür ggf. auch Remark 1.12.(ii). Beweisen Sie Lemma 1.5, Corollary 1.6 und Theorem 1.8. Definieren Sie schließlich den Grothendieck–Witt ring (Definition 1.9) und besprechen Sie im Detail Remark 1.10.

Hinweis: Um die Konstruktionen zu motivieren, könnte es Sinn ergeben, erst $\otimes$ zu besprechen und erst dann Theorem 1.1 zu besprechen. Diese Entscheidung ist Ihnen überlassen.

19.6. 8) Der Grothendieck–Witt Ring: Eigenschaften & Beispiele

Referenz: [Sch85, §2.1-§2.3], S.34-37 und S.39.

Beweisen Sie Theorem 1.11. Stellen Sie dann Dimension und Determinante als Morphismen von $\hat{W}(R)$ vor, besprechen Sie hierfür im Detail §2.2 bis einschließlich Definition 2.1. Beweisen Sie als Anwendungen Theorem 3.1.

Besprechen Sie dann Lemma 3.7 ohne Beweis[1] und folgern Sie daraus Theorem 3.8. Um die Bedeutung dieses Resultats zu unterstreichen, erwähnen Sie als Anwendung noch ohne Beweis Corollary 3.11 (S.40), sowie Theorem 3.4 aus Kapitel 5 (S. 175).

26.6. 9) Der Grothendieck–Witt Ring: geordnete Körper

Referenz: [Sch85, §2.4], S.40-44

Führen Sie geordnete Körper ein (Definition 4.1 und Remark 4.2). Besprechen Sie den Sylvesterschen Trägheitssatz in diesem Kontext (Definition 4.3 und Theorem 4.4) und die Signatur als Homomorphismus von $\hat{W}(R)$ (Definition 4.5).

Beweisen Sie als zweiten Teil Ihres Vortrags die Strukturaussagen über $\hat{W}(R)$ für euklidische und pythagoräische Körper aus Corollary 4.8 und Theorem 4.10 (hier reicht es aus, (i)$\Leftrightarrow$ (ii) zu zeigen) und Remark 4.11. Erwähnen Sie das Beispiel $K = \mathbb{R}$.

3.7. 10) Der Satz von Pfister

Referenz: [Sch85, §2.10], S.69-72 bis einschließlich Definition 10.10.

Dieser Vortrag beschäftigt sich mit der Frage, welche $\alpha \in K$ sich als Lösungen einer gegebenen quadratischen Form $q : V \to K$ schreiben lassen, also $\alpha = q(x)$ für ein $x \in V$.

Definieren Sie multiplikative quadratische Räume (Definition 10.1) und besprechen Sie im Detail den Beweis von Lemma 10.4. Besprechen Sie dann den Satz von Pfister (Corollary 10.5) und behandeln Sie auch die historischen Beispiele für $n = 0, 1, 2$ auf S.71.

Besprechen Sie als zweite Anwendung Definition 10.6 und Theorem 10.8. Besprechen Sie schließlich noch die Definition der Pfister-Form (Definition 10.10).

10.7. 11) Abschlussbesprechung

References

[Sch85] Winfried Scharlau. *Quadratic and Hermitian forms*, volume 270 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[1] Vorsicht, hier ist ein kleiner Tippfehler im Buch: statt $\mathbb{F}_p^\times/\mathbb{F}_p^\times$ sollte hier $\mathbb{F}_p^\times/\mathbb{F}_p^{\times 2}$ stehen.